Fondements de la programmation

Examen Partiel - 8 novembre 2017

Les notes de cours sont autorisées.

L'objectif de cet énoncé est d'illustrer un cas spécifique d'application de la Thèse de Church-Turing: on démontre l'inclusion extensionelle du modèle de la machine de Turing (MT) dans celui de la machine à compteurs (MC). En pratique, on démontre comment simuler le fonctionnement d'une MT par une MC. Les quatres questions peuvent être traités dans l'ordre de votre préférence. Les trois premières questions sont indépendantes, et consistent à programmer quelques fonctions simples dans le modèle de la MC. Ces trois fonctions simples sont ensuite utilisées dans la simulation proprement dite, qui est l'objet de la quatrième question.

Question 1

Décrire une MC qui calcule le modulo de son entrée par 3.

Corrigé.

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & 1: \ if\ X_0 = 0\ goto\ 10\ else\ 2, \\ & 2: \ X_0 = X_0 - 1, \\ & 3: \ if\ X_0 = 0\ goto\ 9\ else\ 4, \\ & 4: \ X_0 = X_0 - 1, \\ & 5: \ if\ X_0 = 0\ goto\ 8\ else\ 6, \\ & 6: \ X_0 = X_0 - 1, \\ & 7: \ goto\ 1, \\ & 8: \ X_0 = X_0 + 1, \\ & 9: \ X_0 = X_0 + 1, \\ & 10: \end{aligned}$$

□

Question 2

Décrire une MC qui calcule la multiplication de son entrée par 3.

Corrigé.

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & 1: \ if\ X_0 = 0\ goto\ 7\ else\ 2, \\ & 2: \ X_1 = X_1 + 1, \\ & 3: \ X_1 = X_1 + 1, \\ & 4: \ X_1 = X_1 + 1, \\ & 5: \ X_0 = X_0 - 1, \end{aligned}$$

6 : *goto* 1,
7 : $if\ X_1 = 0$ *goto* 11 *else* 8,
8 : $X_1 = X_1 - 1$,
9 : $X_0 = X_0 + 1$,
10 : *goto* 7,
11 :

□

Question 3

Décrire une MC qui calcule la division entière de son entrée par 3.

Corrigé.

$$
\begin{aligned}
P \quad = \quad & 1:\ if\ X_0 < 3\ goto\ 7\ else\ 2,\\
& 2:\ X_0 = X_0 - 1,\\
& 3:\ X_0 = X_0 - 1,\\
& 4:\ X_0 = X_0 - 1,\\
& 5:\ X_1 = X_1 + 1,\\
& 6:\ goto\ 1,\\
& 7:\ X_0 = 0,\\
& 8:\ if\ X_1 = 0\ goto\ 12\ else\ 9,\\
& 9:\ X_1 = X_1 - 1,\\
& 10:\ X_0 = X_0 + 1,\\
& 11:\ goto\ 8,\\
& 12:
\end{aligned}
$$

□

Question 4 - Simulation d'une MT par une MC

Dans cette question, on considère le modèle de la MT à un seul ruban, sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. Pour simuler cette MT par une MC, on va utiliser deux compteurs entiers, R_g et R_d, qui encodent dans deux entiers naturels les parties non-vides gauche ($\mathcal{S}_g$) et droite ($\mathcal{S}_d$) du ruban. On adopte pour l'encodage la convention suivante: la tête de lecture de la MT est située sur la première case de la partie droite du ruban.

Pour coder une suite finie de caractères dans $\{0, 1, B\}$ par un entier naturel, on adopte la convention suivante:

1. le caractère B de la MT est représenté par le chiffre ternaire 0,
2. le caractère 0 de la MT est représenté par le chiffre ternaire 1, et enfin
3. le caractère 1 de la MT est représenté par le chiffre ternaire 2.

A une suite finie $\mathcal{S}$ de caractères dans $\{0, 1, B\}$, on fait ainsi correspondre une suite finie de chiffres ternaires. Cette suite finie de chiffres est la représentation en base 3 d'un nombre entier $n_{\mathcal{S}}$,qu'on appelle *encodage ternaire* de $\mathcal{S}$.

Exemple : Soit $\mathcal{S}$ la suite de caractères $(1, 0, 1, B, B, 1)$. La suite de chiffres ternaires correspondante est $(2, 1, 2, 0, 0, 2)$, et l'entier représenté par cette suite de chiffres est $n_{\mathcal{S}} = 2.3^5 + 1.3^4 + 2.3^3 + 0.3^2 + 0.3^1 + 2.3^0 = 623$.

Pour encoder la structure de donnée interne à la MT ($MT - store$), on va considérer les deux suites de caractères suivantes:

- $\mathcal{S}_g$, la suite des caractères dans $\{0, 1, B\}$ situés à gauche de la tête de lecture de la MT, lus de gauche à droite depuis le caractère 0 ou 1 le plus à gauche, jusqu'au dernier caractère avant la tête de lecture. Si la partie gauche du ruban ne contient que des B, alors $\mathcal{S}_g = (B)$.
- $\mathcal{S}_d$, la suite des caractères dans $\{0, 1, B\}$ situés à droite de la tête de lecture de la MT, lus de droite à gauche depuis le caractère 0 ou 1 le plus à droite, jusqu'à la tête de lecture incluse. Si la partie droite du ruban ne contient que des B, $\mathcal{S}_d = (B)$.

La structure de donnée $MT - store$ est alors représentée dans $MC - store$ par les deux encodages ternaires N_g et N_d de $\mathcal{S}_g$ et $\mathcal{S}_d$, stockés dans les deux registres R_g et R_d.

Pour traiter la question 4, on suppose déjà traitées les questions 1 à 3. On enrichit donc le langage de la MC avec les instructions suivantes, correspondantes aux questions 1 à 3, que vous êtes libres d'utiliser :

$$X_i := X_j \ mod \ 3 \mid X_i := X_j \ mul \ 3 \mid X_i := X_j \ div \ 3$$

Question 4.1

En utilisant l'encodage de $MT - store$ décrit ci-dessus, écrire une MC qui encode l'instruction *right* de la MT.

Corrigé.

- Pour la partie gauche du ruban: chaque caractère du ruban de la MT correspond à un chiffre ternaire d'un certain rang. Comme ces chiffres sont lus de gauche à droite, après déplacement de la tête de lecture à droite, ce rang est augmenté de 1. Il faut donc multiplier R_g par 3. En outre, la case la plus à droite de la partie gauche du ruban reçoit l'ancienne case la plus à gauche de la partie droite. Il faut donc rajouter à R_g le chiffre ternaire de rang 0 de R_d, c'est à dire $R_d \ mod \ 3$.
- Pour la partie droite du ruban: chaque caractère du ruban de la MT correspond là aussi à un chiffre ternaire d'un certain rang. Comme ces chiffres sont lus de droite à gauche, après déplacement de la tête de lecture à droite, ce rang est diminué de 1. Il faut donc effectuer la division entière de R_d par 3.

Ce qui donne:

$$\begin{array}{rcl} P & = & 1: \ R_g = R_g \ mul \ 3, \\ & & 2: \ X_1 = R_d \ mod \ 3, \\ & & 3: \ if \ X_1 = 0 \ goto \ 7 \ else \ 4, \\ & & 4: \ X_1 = X_1 - 1, \\ & & 5: \ R_g = R_g + 1, \\ & & 6: \ goto \ 3, \\ & & 7: \ R_d = R_d \ div \ 3, \\ & & 8: \end{array}$$

□

Question 4.2

En utilisant l'encodage de $MT - store$ décrit ci-dessus, écrire une MC qui encode l'instruction $write$ 1 de la MT.

Corrigé.

La partie gauche du ruban n'est pas modifiée: il ne faut donc pas modifier le registre R_g. Pour la partie droite, le chiffre de rang 0 est remplacé par le chiffre 2, qui code le caractère 1 de la MT. Ceci se fait en deux étapes: on remplace ce chiffre de rang 0 par le chiffre 0 (i.e. on soustrait $R_d \; mod \; 3$ à R_d), puis on remplace ce chiffre 0 par le chiffre 2 (i.e. on rajoute 2 à R_d).

Ce qui donne:

$$
\begin{array}{rcl}
P & = & 1: \; X_1 = R_d \; mod \; 3, \\
 & & 2: \; if \; X_1 = 0 \; goto \; 7 \; else \; 3, \\
 & & 3: \; X_1 = X_1 - 1, \\
 & & 4: \; R_d = R_d - 1, \\
 & & 5: \; goto \; 2, \\
 & & 7: \; R_d = R_d + 1, \\
 & & 8: \; R_d = R_d + 1, \\
 & & 9:
\end{array}
$$

□

Question 4.3

En utilisant l'encodage de $MT{-}store$ décrit ci-dessus, écrire une MC qui encode l'instruction $if \; 1 \; goto \; l' \; else \; l"$ de la MT.

Corrigé.

Le ruban n'est pas modifié: il ne faut donc pas modifier les registres R_g et R_d. Le caractère 1 de la machine de Turing est codé par le chiffre ternaire 2 : il faut donc tester si le chiffre de rang 0 de R_d est 2, et brancher en condéquence.

Ce qui donne:

$$
\begin{array}{rcl}
P & = & 1: \; X_1 = R_d \; mod \; 3, \\
 & & 2: \; if \; X_1 = 2 \; goto \; l' \; else \; l", \\
 & & 3:
\end{array}
$$

□