FONDEMENTS DE LA PROGRAMMATION

MASTER 1 INFORMATIQUE 2017-2018
INSTITUT GALILÉE - UNIVERSITÉ PARIS 13

Paulin de Naurois - Domenico Ruoppolo
(d'après un cours par Virgile Mogbil et Pierre Boudes)

TD 4: Fonctions Récursives

Exercice 1. Prouver que les fonctions suivantes sont primitives récursives:

(a) $\mathsf{id} : \; x \in \mathbb{N} \;\mapsto\; x \in \mathbb{N}$ *(fonction identité)*
(b) $\underline{3} : \; x \in \mathbb{N} \;\mapsto\; 3 \in \mathbb{N}$ *(exemple de fonction constante)*
(c) $\underline{3}_k : \; (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \;\mapsto\; 3 \in \mathbb{N}$ *(fonction constante généralisée)*
(d) $\mathsf{add} : \; (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\mapsto\; x + y \in \mathbb{N}$ *(fonction somme)*
(e) $\mathsf{mul} : \; (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\mapsto\; x \cdot y \in \mathbb{N}$ *(fonction multiplication)*
(f) $\mathsf{exp} : \; (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\mapsto\; y^x \in \mathbb{N}$ *(fonction exponentielle)*
(g) $\mathsf{pred} : \; x \in \mathbb{N} \;\mapsto\; x \dot{-} 1 \in \mathbb{N}$ *(fonction précédent)*
(h) $\mathsf{sous} : \; (x, y) \in \mathbb{N} \;\mapsto\; y \dot{-} x \in \mathbb{N}$ *(fonction soustraction tronquée)*
(i) $\mathsf{fact} : \; x \in \mathbb{N} \;\mapsto\; !\,x \in \mathbb{N}$ *(fonction factorielle)*
(j) $\mathsf{mod}_2 : \; x \in \mathbb{N} \;\mapsto\; [x]_2 \in \mathbb{N}$ *(fonction module 2, i.e. reste de la division par 2)*

Exercice 2. Prouver que les fonctions suivantes sont primitives récursives:

(a) $\mathsf{eg} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ qui teste l'égalité de deux naturels, i.e. la fonction définie comme $\mathsf{eg}(x, y) = 1$ si $x = y$ et $\mathsf{eg}(x, y) = 0$ sinon. *[Aide: exploiter une quelque fonction de l'exercice 1]*
(b) $\mathsf{ppe} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ qui teste si un naturel est plus petit ou égale à un autre, i.e. la fonction définie comme $\mathsf{ppe}(x, y) = 1$ si $x \leq y$ et $\mathsf{ppe}(x, y) = 0$ sinon. *[Aide: exploiter le point a]*

Exercice 3. Prouver que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont primitives récursives alors la fonction $f + f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définie par $(f + f')(x) := f(x) + f'(x)$, est primitive récursive.

Exercice 4. Prouver que la fonction $\mathsf{min_k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ qui renvoie le plus petit entre k entiers naturels est récursive. Est-elle également primitive récursive?

Rappel. La notion de *fonctions (primitives) récursives sur les notations* nous permet de representer les fonctions (primitives) récursives comme prennant en entrée et donnant en sortie les entiers naturels *dans une certaine representation* (binaire, decimale, ou sur n'importe quel autre alphabet). Dans le cas binaire, la première fonction successeur s_0 ajoute 0 en tête du mot, c.a.d. $s_0(x) := 0.x$, tandis que l'autre fonction successeur s_1 y ajoute 1. Par exemple, $4 = 100 = s_1(s_0(s_0(\epsilon)))$, i.e. formellement 4 est $\mathsf{COMP}\big(s_1\,, \mathsf{COMP}\big(s_0\,, \mathsf{COMP}(s_1\,, \epsilon)\big)\big)$.

Exercice 5. Refaire les fonctions de l'Exercice 1 comme primitives récursives sur la notation binaire.