FONDEMENTS DE LA PROGRAMMATION

MASTER 1 INFORMATIQUE 2017-2018
INSTITUT GALILÉE - UNIVERSITÉ PARIS 13

Paulin de Naurois - Domenico Ruoppolo
(d'après un cours par Virgile Mogbil et Pierre Boudes)

TD 5: Lambda-calcul pur

Notations. Par convention on utilise toujours les notations suivantes pour les λ-termes.

- On écrit $\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.M$ pour représenter de manière synthétique le terme $\lambda x_1.\lambda x_2.\ldots\lambda x_n.M$.
- On écrit $\big(M_1 M_2 M_3 \cdots M_n\big)$ pour représenter le terme $\big(\cdots\big((M_1 M_2) M_3\big)\cdots M_n\big)$, c'est-à-dire ce qu'on obtient par l'application de M_1 à M_2, et après l'application du résultat $(M_1 M_2)$ à M_3, et comme cela de suite jusqu'au dernier argument M_n. Faire donc attention à ne pas le lire inversement comme $\big(M_1 \cdots \big(M_{n-2}(M_{n-1}M_n)\big)\cdots\big)$, ce qui est une erreur!

Exercice 1. Donner l'ensemble des variables libres et celui des variables liées des termes suivants:

1. $(x\ y)$
2. $(x\ (\lambda y.y))$
3. $\lambda xyz.(x\ (y\ z))$
4. $((\lambda xyz.(x\ y))\ z)$
5. $((\lambda x.(x\ y))\ x)$
6. $((\lambda x.x)\ (\lambda x.x))$

Exercice 2. Pour chacun des trois derniers termes de l'exercice précédent donner un terme qui lui est α-équivalent et utilise un maximum de noms de variables.

Exercice 3. Effectuer les substitutions suivantes:

1. $x[x \leftarrow y]$
2. $x[x \leftarrow \lambda fx.(f(f(fx)))]$
3. $(x\,y)[x \leftarrow \lambda z.z]$
4. $\big(x\,y[x \leftarrow \lambda z.z]\big)$
5. $(x\,x)[x \leftarrow \lambda v.v]$
6. $(x\,x)[y \leftarrow \lambda u.u]$
7. $((\lambda x.(x\,y))\,x)[x \leftarrow z]$
8. $((\lambda x.(x\,y))\,y)[y \leftarrow z]$
9. $\big((\lambda x.(x\,y))\,y\,[y \leftarrow xyz]\big)$

Notations alternatives. La substitution $M[x \leftarrow N]$ est parfois représentée par des notations autre que celle utilisée ci-dessus, telles que par example $M[x := N]$, $M[N/x]$ ou plus souvent $M\{N/x\}$.

Exercice 4. β-réduire les termes suivants, jusqu'à leur forme normale si elle existe:

1. $\mathbf{I} := \lambda x.x$
2. $(\mathbf{I}\,(\mathbf{I}\,\mathbf{I}))$
3. $((\lambda x.x\,x)\,(\lambda a.a))$
4. $((\lambda xy.y)\,f\,g)$
5. $(\,(\lambda xy.(x\,x\,(x\,y)))\,(\lambda x.z)\,)$
6. $\boldsymbol{\Delta} := \lambda x.(x\,x)$
7. $\boldsymbol{\Omega} := (\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta})$
8. $\mathbf{K} := \lambda xy.x$
9. $\mathbf{S} := \lambda xyz.(xz(yz))$
10. $(\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K})$
11. $(\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega})$
12. $(\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Omega}\,x)$
13. $\big(\,(\lambda x.(y(x\boldsymbol{\Delta})\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K}))\ \boldsymbol{\Delta}\,\big)$
14. $\big(\,(\lambda ab.(aaaaa\,\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K}\,(b\,\boldsymbol{\Omega})))\ \mathbf{I}\,\big)$
15. $(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}x)$
16. $(\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Delta}x))$
17. $\big(\lambda x.(y\,x(\lambda z.zx)(\lambda z.z(\lambda v.vx)))\,\boldsymbol{\Omega}\big)$

Exercice 5. En modifiant le terme $\mathbf{\Delta}$ (voir les points 6. et 7. de l'exercice 4), définir un terme $\mathbf{\Delta'}$ tel que $(\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}) \to_\beta (\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}) \to_\beta (\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}) \to_\beta (\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}\mathbf{\Delta'}) \to_\beta \cdots$, et comme cela à l'infini.

Rappel. Un terme M a une *forme normale de tête* ssi $M \to_\beta^* \lambda x_1 \ldots x_m.(x\, M_1 \ldots M_n)$ où $m, n \in \mathbb{N}$. Dans cette définition $x_1, \ldots, x_m$ et x sont des variables quelconques, et x peut être ou pas l'une parmi $x_1, \ldots, x_m$. Les termes $M_1, \ldots, M_n$ sont génériques, en particulier ils ne sont pas censés être en forme normale.

On remarque que tout terme en forme normale est en forme normale de tête, mais l'inverse n'est pas vrai.

Exercice 6. Parmi les termes de l'exercice 4 qui n'ont pas de forme normale, lesquels ont une forme normale de tête?

Exercice 7. Pour chaque M ci-dessous trouver des termes $N_1, N_2, \cdots, N_n$ tels que $(M N_1 N_2 \cdots N_n) \to_\beta^* \mathbf{I}$.

1. $M = \mathbf{I}$
2. $M = \mathbf{K}$
3. $M = \lambda x.(x\, \mathbf{\Omega})$
4. $M = \lambda x.(x(x\, \mathbf{\Omega}))$

Remarque. Ce qu'on a fait dans l'exercice 7 marche pour tout terme clos (c.a.d. sans variables libres) ayant une forme normale de tête. En fait, en 1971 Henk Barendregt a prouvé le résultat suivant:

Théorème. Soit M un terme clos. Alors M a une forme normale de tête ssi ils existent des termes $N_1, N_2, \cdots, N_n$ tels que $(M N_1 N_2 \cdots N_n) \to_\beta^* \mathbf{I}$.

Notation alternative. Ici nous utilisons toujours la notation (MN) pour le terme obtenu par application du terme M au terme N. Mais en littérature l'on trouve le plus souvent la notation MN, sans les parenthèses. Par exemple $(x\,\mathbf{I})$ s'écrit comme $x\,\mathbf{I}$. Avec cette notation alternative les parenthèses sont utilisées de façon minimale, exclusivement afin d'éviter les ambiguïtés. Par exemple $\big((\lambda x.(y(x\mathbf{\Delta})\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K}))\,\mathbf{\Delta}\big)$ s'écrit comme $(\lambda x.y(x\mathbf{\Delta})\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K})\,\mathbf{\Delta}$.
Vous êtes autorisé.e.s à utiliser cette notation alternative, mais dans ce cas-là veuillez bien l'indiquer dans votre copie à l'examen.

Exercice 8 (optionnel). Écrire les termes des exercices 1, 3, 4 en utilisant la notation alternative ci-dessus.

Rappel. La relation de *β-conversion*, représentée par le symbole $=_\beta$, est une généralisation de la β-réduction $\to_\beta^*$. L'on définit $M =_\beta M'$ ssi ils existent $n \in \mathbb{N}$ et des termes $M_0, \ldots, M_n$ tels que $M_0 = M$, $M_n = M'$ et pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ soit $M_i \to_\beta M_{i+1}$ soit *vice versa* $M_{i+1} \to_\beta M_i$.

Exercice 9. Un terme P est un *point fixe* d'un autre terme F ssi $(FP) =_\beta P$.

1. Soit $\mathbf{Y} := \lambda f.\big((\lambda x.(f(x\,x)))\,(\lambda x.(f(x\,x)))\big)$. Prouver que pour n'importe quel terme M le terme $\mathbf{Y}M$ est un point fixe de M.
2. Soit $\mathbf{\Theta} := \big((\lambda x f.(f(x\,x f))\,(\lambda x f.(f(x\,x f)))\big)$. Prouver que pour n'importe quel terme M le terme $\mathbf{\Theta}M$ est un point fixe de M. Quelle différence remarquez-vous par rapport au cas de $\mathbf{Y}$ ci-dessus?

Définition. Le terme $\mathbf{Y}$ ci-dessus s'appelle *combinateur de point fixe de Curry*, tandis que $\mathbf{\Theta}$ s'appelle *combinateur de point fixe de Turing.* En général, un terme clos (sans variables libres) $\mathbf{O}$ est dit *combinateur de point fixe* ssi pour tout terme M le terme $(\mathbf{O}M)$ est un point fixe de M, i.e. pour tout M on a $(M(\mathbf{O}M)) =_\beta \mathbf{O}M$.

Exercice 10 (très difficile!) Prouver les résultats suivants, que l'on doit à Corrado Böhm:

Lemme. Soit $\mathbf{O}$ un combinateur de point fixe. Alors $\lambda x.(\mathbf{O}\, x) =_\beta \mathbf{O}$.

Aide: sachant que $(x(\mathbf{O}\, x)) =_\beta (\mathbf{O}\, x)$ *par hypothèse, utiliser le théorème de confluence forte pour conclure que* $(\mathbf{O}\, x) \to_\beta^* x\, P$ *pour un certain terme* P*. Après utiliser le fait que* $\mathbf{O}$ *n'a pas de variables libres pour en déduire que* $\mathbf{O} =_\beta \lambda x.N$ *pour un certain terme* N*. Le reste est relativement facile...*

Théorème. Soit $\delta := (\mathbf{SI})$. Un terme $\mathbf{O}$ est un combinateur de point fixe ssi il est un point fixe de δ.

Aide: il faut utiliser le lemme précédent pour l'implication $\Rightarrow$*.*

Exercice 11. En utilisant le combinateur de point fixe de Curry $\mathbf{Y}$ (voir exercice 9), trouver un terme M qui satisfait l'équation récurrente $(Mxy) =_\beta \lambda z.(z(Mx))$.
Aide: le terme M *aura la forme* $M = (\mathbf{Y}F)$ *pour un certain terme* F*...*