# FONDEMENTS DE LA PROGRAMMATION

MASTER 1 INFORMATIQUE 2017-2018
INSTITUT GALILÉE - UNIVERSITÉ PARIS 13

Paulin de Naurois - Domenico Ruoppolo
(d'après un cours par Virgile Mogbil et Pierre Boudes)

## TD 6: Lambda-calcul pur (suite)

**Rappel de cours.** L'$\eta$-réduction est définie, pour tout terme $M$ du $\lambda$-calcul pur, par la règle:

$$\lambda x.(Mx) \to_\eta M \qquad \text{si } x \notin \mathrm{FV}(M)$$

**Exercice 1.** $\eta$-réduire les termes suivantes:

1. $\lambda x.(\mathbf{\Omega}\, x)$
2. $\lambda x.(\lambda y.(\mathbf{I}\, y)\, x)$
3. $\lambda x.(y\,(\lambda uvw.(ww))\, x)$
4. $\lambda x.(y\,(\lambda uvw.(wxw))\, x)$
5. $\lambda q.((xq)q)$
6. $\lambda x_1 x_2 \ldots x_6.(y\, x_1 x_2 \ldots x_6)$

**Rappel de cours.** Ils existent nombres de *stratégies* d'évaluation (c'est à dire de $\beta$-réduction) des termes. Deux stratégies plutôt importantes sont la stratégie *interne droite* (en anglais *innermost*), qui est à la base des implémentations en *appel par valeurs* de langages fonctionnels tels que ML, Scheme, Caml (et d'autres encore), et la stratégie *externe gauche* (en anglais *outermost*), également nommée stratégie *appel par nom.*
La stratégie *interne droite* est définie de la façon suivante:

- pour les termes de la forme $\lambda x.M$ réduire $M$ (et le résultat de la réduction de tel $\lambda x.M$ sera $\lambda x.M'$ où $M'$ est le résultat de la réduction de $M$);
- sur les termes de la forme $(MN)$ faire dans l'ordre:
  1. réduire $M$, et arrêter la stratégie si l'on n' a pas obtenu un terme de la forme $\lambda x.M'$;
  2. réduire $N$, en obtenant n'importe quel terme $N'$;
  3. enfin réduire $((\lambda x.M')\, N')$.

La stratégie *externe gauche* est définie comme ci-dessus, mais sans le point 2. Autrement dit:

- pour les termes de la forme $\lambda x.M$ réduire $M$ (et le résultat de la réduction de tel $\lambda x.M$ sera $\lambda x.M'$ où $M'$ est le résultat de la réduction de $M$);
- sur les termes de la forme $(MN)$ faire dans l'ordre:
  1'. réduire $M$, et arrêter la stratégie si l'on n' a pas obtenu un terme de la forme $\lambda x.M'$;
  2'. enfin réduire $((\lambda x.M')\, N)$.

**Exercice 2.** On rappelle les définitions de termes données en **TD 5**:

- $\mathbf{K} := \lambda xy.x$
- $\mathbf{I} := \lambda x.x$
- $\mathbf{\Omega} := \big((\lambda x.xx)\,(\lambda x.xx)\big)$

$\beta$-réduire les termes suivants, d'abord en utilisant la stratégie *interne droite* et après l'*externe gauche*. Remarquez-vous des différences dans les résultats finales?

1. $\lambda f.\big((\lambda y.(fyy))(\mathbf{K}uv)\big)$
2. $\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}$
3. $\big(\lambda x.((\lambda h.hx)(\lambda ab.(bbba)\, x\, \mathbf{I}))\ \lambda yz.\mathbf{K}(\mathbf{I}z)yz\big)$

**Exercice 3.** Nous définissons les termes booléens $\mathbf{T} := \mathbf{K} := \lambda xy.x$ et $\mathbf{F} := \lambda xy.y$. Donner

- un terme 'négation' $\texttt{not}$ tel que $(\texttt{not}\,\mathbf{T}) \to_\beta^* \mathbf{F}$ et $(\texttt{not}\,\mathbf{F}) \to_\beta^* \mathbf{T}$;
- un terme $\texttt{if\_then\_else}$ tel que pour tous termes $M$ et $N$ l'on a $(\texttt{if\_then\_else}\,\mathbf{T}MN) \to_\beta^* M$ et $(\texttt{if\_then\_else}\,\mathbf{F}MN) \to_\beta^* N$.

**Rappel de cours.** L' $n$-ème *numéral de Church* est défini comme

$$\overline{n} \;:=\; \lambda fx.(f(f(\dots(f\,x)\dots)))$$

où l'application de $f$ (à un sous-terme) se répète $n$ fois. Par exemple $\overline{3} = \lambda fx.(f(f(f\,x)))$ et $\overline{0} := \lambda fx.x = \mathbf{F}$.

Une fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est $\lambda$-*définissable* ssi il y a un terme $M$ tel que $\big(M\,\overline{n_1}\dots\overline{n_k}\big) \to_\beta^* \overline{f(x_1,\dots,x_k)}$.

La *thèse de Church* affirme qu'une fonction est calculable ssi elle est $\lambda$-définissable.

**Exercice 4.** Prouver que les fonctions successeur, somme, multiplication, exponentielle, sont $\lambda$-définissables.

**Exercice 5.** Prouver que la fonction $f : (n,m) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2n^3 + 7m \in \mathbb{N}$ est $\lambda$-définissable.

**Exercice 6.** Supposons d'avoir un terme $\texttt{div}$ qui $\lambda$-définit la division de nombres naturels, c'est-à-dire tel que $(\texttt{div}\,\overline{n}\,\overline{m}) \to_\beta^* \overline{(\frac{n}{m})}$. Soit $\mathbf{Y}$ un combinateur de point fixe (voir aussi exercices 9 et 11 du **TD 5**!), c'est à dire un terme $\mathbf{Y}$ tel que $(\mathbf{Y}M) \to_\beta^* (M(\mathbf{Y}M))$ pour tout $M$. Prouver que la fonction factorielle est $\lambda$-définissable. À ce but, exploiter la définition *co-inductive* de $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, à savoir

$$!\,n \;:=\; \frac{!\,(n+1)}{n+1}$$

*Aide: le terme aura la forme* $(\mathbf{Y}M)$ *pour un certain* $M$.

**Rappel de cours.** On peut coder les listes en $\lambda$-calcul pur par

$$[M_1,\dots,M_n] \;:=\; \lambda fx.(fM_1(fM_2(\dots(fM_n\,x)\dots)))$$

**Exercice 7.** Définir un terme $\texttt{cons}$ tel que $\big(\texttt{cons}M_0[M_1,\dots,M_n]\big) \to_\beta^* [M_0M_1,\dots,M_n]$

**Remarque.** Une autre façon de coder les listes en $\lambda$-calcul pur est la suivante:

$$\langle M_1,\dots,M_n\rangle \;:=\; \lambda f.(fM_1M_2\dots M_n)$$

**Exercice 8.** Définir un terme $\texttt{cons}$ tel que $\big(\texttt{cons}M_0\langle M_1,\dots,M_n\rangle\big) \to_\beta^* \langle M_0M_1,\dots,M_n\rangle$

**Exercice 9.** Définir un term $\texttt{inver}_\texttt{n}$ tel que $\big(\texttt{inver}_\texttt{n}\langle M_1,\dots,M_n\rangle\big) \to_\beta^* \langle M_n,\dots,M_1\rangle$.

(L'on remarquera que définir ce terme invertant pour l'autre codage $[M_1,\dots,M_n]$ est plus difficile!)