FONDEMENTS DE LA PROGRAMMATION

MASTER 1 INFORMATIQUE 2017-2018
INSTITUT GALILÉE - UNIVERSITÉ PARIS 13

Paulin de Naurois - Domenico Ruoppolo
(d'après un cours par Virgile Mogbil et Pierre Boudes)

TD 8: Lambda-calcul simplement typé

Exercice 1. Donner un type à chacun des termes suivants, lorsque c'est possible:

1. $\mathbf{I} := \lambda x.x$
2. $\lambda x.y$
3. $\overline{3} := \lambda xf.(f\ (f\ (f\ x)))$
4. $\lambda xyz.(x\ y\ z)$
5. $\mathbf{S} := \lambda xyz.\big(x\ z\ (yz)\big)$
6. $(x\ y)$
7. $(x\ x)$
8. $\big((\lambda x.x)\ (\lambda x.x)\big)$
9. $\mathbf{Y} := \lambda f.\big(\,(\lambda x.(f\ (x\ x)))\,(\lambda x.(f\ (x\ x)))\,\big)$
10. $\mathbf{\Omega} := \big((\lambda x.(xx))\,(\lambda x.(xx))\big)$

Exercice 2. On rappelle que $\mathbf{T} := \lambda xy.x$ et $\mathbf{F} := \lambda xy.y$. Proposer un type simple qui puisse jouer le rôle de `bool`. Y-a-il un choix canonique? Et pour `nat`?

Rappel de cours. Donné un système de typage et une certaine notion de réduction $\to_R$ sur ses termes:

- le système a la propriété de *réduction du sujet* si $\Gamma \vdash M : A$ et $M \to_R^* M'$ impliquent $\Gamma \vdash M' : A$;
- le système a la la propriété d'*expansion du sujet* si $\Gamma \vdash M' : A$ et $M \to_R^* M'$ impliquent $\Gamma \vdash M : A$.

Par exemple, on a vu en cours que le système appelé λ-calcul simplement typé a la propriété de réduction du sujet par rapport à la β-réduction.

Exercice 3. Donner un type à chacun des termes suivants, lorsque c'est possible:

1. $\big(\lambda f.\big((\lambda y.(fyy))(\mathbf{T}uv)\big)\ \mathbf{I}\big)$
2. $\lambda z.\big(\mathbf{I\,I\,I\,I}z\,\mathbf{I}(\,\mathbf{I\,I\,I\,I}v)((\lambda x.y)(\,\mathbf{I\,I}z))\big)$
3. $\big(\lambda x.((\lambda h.hx)(\lambda ab.(bbba)\,x\,\mathbf{I}))\ (\lambda yz.\mathbf{T}(\mathbf{I}z)yz)\big)$
4. $(\mathbf{S\,F\,I})$

Exercice 4. Prouver que le λ-calcul simplement typé n'a pas la propriété d'expansion du sujet par rapport à la β-réduction. *Aide: chercher un exemple de terme non typable qui se réduit en un terme typable.*

Rappel de cours. L'η-réduction est définie par la règle: $\lambda x.(Mx) \to_\eta M$ si $x \notin \mathrm{FV}(M)$.

Exercice 5. Est-ce que le λ-calcul simplement typé a la propriété de réduction du sujet par rapport à la η-réduction? Et l'expansion du sujet?

Remarque. Un terme N du λ-calcul (pur) est en forme β-normale — c'est à dire qu'on ne peut pas le β-réduire — ssi il a la forme suivante:

$$N \;=\; \lambda x_1 \dots x_n.(x\, N_1 \dots N_k)$$

où

- $n, k \in \mathbb{N}$ (ils peuvent même être 0),
- x est une variable quelconque (elle peut aussi être l'une des variable λ-abstraites x_i),
- chaque N_j est lui-même en forme β-normale.

Formellement cette propriété est une induction sur la structure d'arbre du terme.

Exercice 6. Ce qu'on a fait pour l'exercice 1 — c'est à dire donné un terme M trouver au moins un typage $\Gamma \vdash M : A$ pour tel terme — s'appelle *inférence de type*.

En s'appuyant sur la remarque ci-dessus, prouver que l'inférence de type pour les termes en forme β-normale est un problème décidable.

Aide: donner juste un algorithme informel, qui ne soit pas formalisé dans un modèle de calcul.

Exercice 7. Pour chacun des types suivants, donner un terme clos (sans variable libre) de ce type.

1. $A \to A$
2. $(A \to A) \to (A \to A)$
3. $A \to \big((A \to B) \to B\big)$.

Exercice 8. Prouver que chacune des formules suivantes est un théorème de la logique intuitionniste minimale.

1. $p \implies p$
2. $(p \implies p) \implies (p \implies p)$
3. $p \implies \big((p \implies q) \implies q\big)$.

Exercice 9. La formule logique

$$\big((p \implies q) \implies p\big) \implies p$$

s'appelle *loi de Pierce*. Prouver qu'elle est un théorème de la logique classique (i.e. qu'elle est vraie) mais qu'elle n'est pas un théorème de la logique intuitionniste minimale.