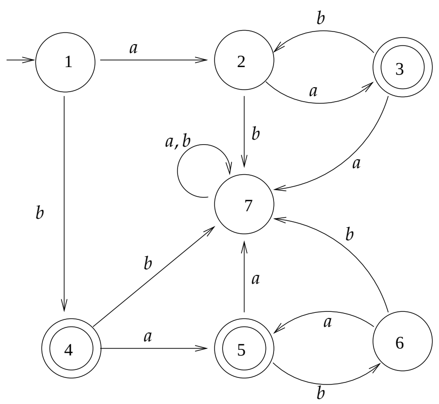
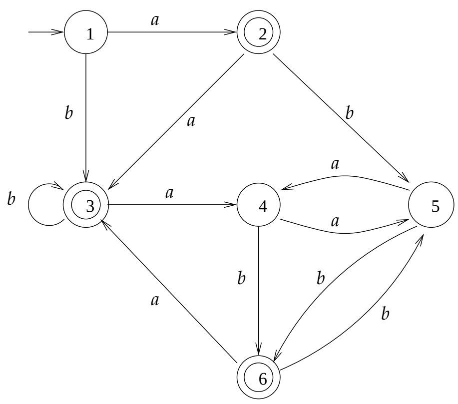
Module Langages Formels
TD 3 : Minimisation et langages rationnels

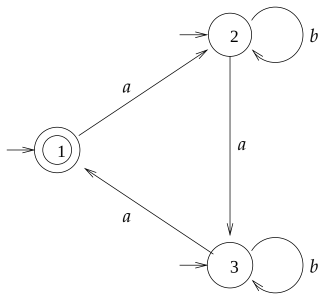
Exercice 1 `Minimisons !`

1.1. Minimiser les automates suivants en utilisant l'algorithme vu en cours :





1.2. Déterminiser et minimiser l'automate suivant. À votre avis si on généralise à n états, combien d'états aura le déterminisé ? Le minimal ?



Exercice 2 `Trois Lemmes pour les étudiants sous le ciel`

Dans cet exercice, nous allons considérer les trois versions du lemme de l'Étoile :

1. Si L est un langage reconnu par un automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall u \in L, |u| \geq n \implies \exists v,t,w \in \Sigma^*, \quad u = vtw \wedge |t| > 0 \wedge \forall m \in \mathbb{N}, vt^m w \in L$$

2. Si L est un langage reconnu par un automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall u = rst \in L, |s| \geq n \implies \exists v,w,x \in \Sigma^*, \quad s = vxw \wedge |x| > 0 \wedge \forall m \in \mathbb{N}, rvx^m wt \in L$$

3. Si L est un langage reconnu par un automate fini, alors

$$\begin{aligned}\exists n \in \mathbb{N},\ \forall u = ru_1u_2\dots u_ns \in L, (\forall i, |u_i| \geq 1) \implies \exists 1 \leq i < j \leq n, \quad \forall m \in \mathbb{N},\\ ru_1\dots u_{i-1}(u_i\dots u_j)^m u_{j+1}\dots u_n s \in L\end{aligned}$$

2.1. Soit $L = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$, montrer que L vérifie le Lemme 1 mais pas le Lemme 2.

2.2. Soit $L' = \{(ab)^n(cd)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^*(aa+bb+cc+dd+ac+bd)\Sigma^*$, avec $\Sigma = \{a,b,c,d\}$. Montrer que L' vérifie le Lemme 2 mais pas le Lemme 3.

Exercice 3 `Ceci n'est pas un lemme de l'étoile`

3.1. Soit L un langage reconnaissable. Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\begin{gathered}\forall u \in \Sigma^*, |u| \geq N, \exists x,y,z \in \Sigma^*, |y| \geq 1, u = xyz,\\ \forall i \geq 0,\ \forall v \in \Sigma^*,\ (uv \in L \iff xy^i zv \in L)\end{gathered}$$

3.2. Soit un langage $L \subseteq \Sigma^*$ tel qu'il existe $N > 0$ tel que

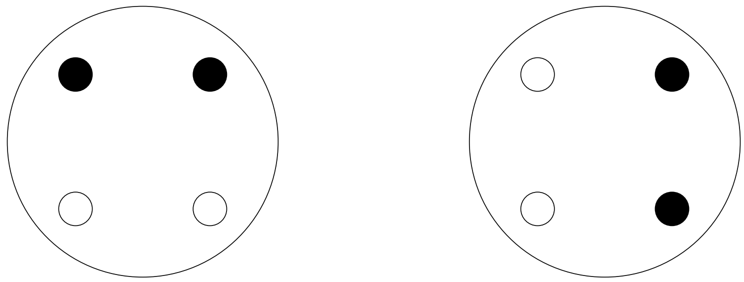
$$\begin{gathered}\forall u \in \Sigma^*, |u| \geq N, \exists x,y,z \in \Sigma^*, |y| \geq 1, u = xyz,\\ \forall i \geq 0,\ \forall v \in \Sigma^*,\ (uv \in L \iff xy^i zv \in L)\end{gathered}$$

Montrer que L est reconnaissable.

Exercice 4 `Le barman aveugle`

On dispose de 4 jetons, chacun ayant une face bleue et une face rouge. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur. Dès que les 4 jetons sont retournés, la partie s'arrête et le barman a gagné.

Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 jetons. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman.



En utilisant une modélisation par des automates, montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse le tourneur de plateau, il a moyen de gagner.

Exercice 5 `Semi-linéarité`

5.1. Soit $\varphi : \Sigma \to \Gamma^*$ un morphisme (i.e. $\forall u, v \in \Sigma^*,\ \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$). Montrer que, si $L \in \mathsf{Rat}(\Sigma)$, alors $\varphi(L) \in \mathsf{Rat}(\Gamma)$.

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires.

5.2. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i,\ a^i \in L\}$ est semi-linéaire.

5.3. En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.